ردپای دو ثابت ریاضی در هرم بزرگ مصر

عباس قلعه‌پور اقدم
دبیر ریاضی از ارومیه

اشاره

این مقاله به بررسی ابعاد هرم بزرگ مصر و ارتباط آن با دوتا از مهم‌ترین ثابت‌های ریاضی (فی و پی) می‌پردازد. در نوشتن مقاله از منابع متنوع انگلیسی و فارسی استفاده شده و تمامی محاسبات در نهایت دقت توسط نویسنده انجام گرفته است. مقاله می‌توانست با توجه به گستردگی ویژگی‌های خاص و رمز و رازهای این بنای عظیم، کامل‌تر به این مقوله بپردازد، لیکن محدودیت حجم مقاله این امر را ناممکن ساخت.

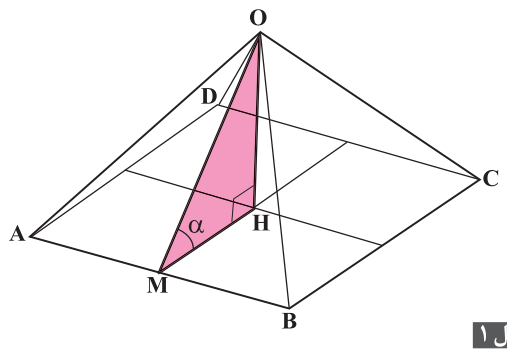
مقدمه

اهرام مصر، کهن‌ترین و یگانه اثر شگرف از عجایب هفت‌گانهٔ ساخت دست بشر در دنیای قدیم‌اند که هنوز پابرجا هستند. از این سه هرم، قدمت هرم بزرگ به ۲۵۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد. این بنای عظیم بیش از چهارهزار سال است که فیلسوفان، دانشمندان و جهانگردان را از نقاط مختلف جهان مجذوب خود ساخته است. دلیل جذابیت آن را می‌توان در این پرسش جست‌وجو کرد که: «مصریان قدیم چگونه و چقدر بر مفاهیم ریاضی و اصول مهندسی مسلط بوده‌اند که توانسته‌اند چنین اثری خارق‌العاده با این همه رمز و راز و پیچیدگی‌های خاص هندسی پدید آورند؟»

در این مقاله به دنبال ردپای دو مورد از مهم‌ترین ثابت‌های ریاضی، یعنی φ (فی) و π (پی) در هرم بزرگ خواهیم بود و سعی خواهیم کرد، ارتباط این دو ثابت را با ابعاد هرم بررسی کنیم و با گوشه‌ای از ریاضیات حاکم بر این بنای عظیم آشنا شویم.

مشخصات هرم بزرگ

تمام هرم‌هایی که مصریان باستان ساخته‌اند، قاعده‌ای مربع‌شکل دارند. «هرم بزرگ»[1] نیز یک هرم مربعی است که برای آشنایی با ابعاد آن ابتدا اجزای یک هرم مربعی مفروض را که در شکل ۱ نمایی از آن به تصویر کشیده شده است، معرفی می‌کنیم. سپس اندازهٔ این اجزا را در هرم بزرگ می‌آوریم.



شکل ۱

قاعدهٔ هرم: مربع ABCD

رأس هرم: نقطهٔ O

محـل برخورد پاره‌خط‌هایی را که وسـط‌های دو ضلع مقابل قاعده را به‌هم وصل می‌کنند، نقطهٔ H می‌نامیم.

ارتفاع هرم: OH

چهار ضلع قاعده را پایه‌های هرم می‌نامیم: AB=BC=CD=AD.

وجوه جانبی هرم: مثلث‌های OAB، OBC، OCD و OAD

فاصلـهٔ رأس هـرم تـا وسـط ضلـع پایینـی وجـه OAB: OM

زاویهٔ شیب هرم: $\angle\alpha$

اندازه‌ها در هرم بزرگ:

طول ضلع قاعدهٔ هرم = ۲۳۰/۴ متر

ارتفاع هرم = ۱۴۶/۵ متر (بلندتر از یک ساختمان ۴۰ طبقه)

(به‌فرم اعشاری) $\angle\alpha=51^\circ 50' 40''=51/85^\circ$

تعداد قطعه سـنگ‌های بـه‌کار رفته = بیشتر از ۲/۵ میلیون قطعه

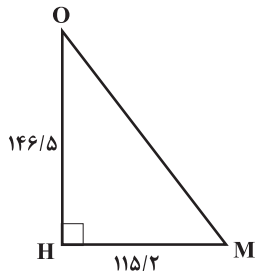
وزن (جرم) تقریبی سنگ‌ها = ۲ تا ۷۰ تن

چون در ادامه به طول OM و مساحت وجوه جانبی نیاز خواهیم داشت، آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$OM^2=OH^2+HM^2$

$\Rightarrow OM^2=(146/5)^2+(115/2)^2$

$\Rightarrow OM\approx 186/4m$



شکل ۲

= مساحت قاعدهٔ هرم

(بیش از ۵ هکتار) مترمربع $230/4\times 230/4=53084/16$

مساحت وجوه جانبی: هر چهار وجه مساحت یکسانی دارند. برای محاسبهٔ مساحت وجه مثلثی OAB توجه می‌کنیم که OM میانهٔ وارد بر ضلع AB اسـت و به‌دلیل متساوی‌السـاقین بودن OAB، M پـای عمود و OM ارتفـاع وارد بر قاعدهٔ AB خواهد بود.

$S_{OAB}^{\Delta}=\frac{OM\times AB}{2}=\frac{1}{2}(186/4\times 230/4)=21473/2$ مترمربع

φ و هرم بزرگ

نسبت طلایی[2]: مستطیلی را که نسبت طول به عرض آن برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ یا به‌طور تقریبی ۱/۶۱۸ باشـد، «مسـتطیل طلایی» گویند. این عدد نسبت طلایی نامیده و با حرف (فی) یونانی (φ) نشان داده می‌شود.

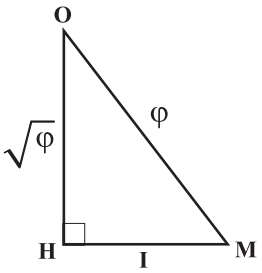
$\varphi\approx 1/618033988$

(فـی) تنها عدد مثبت دارای این ویژگی اسـت که مربع آن یک واحد از خودش بیشتر است.

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=1+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi+1=\varphi^2 \quad (1)$$

مثلث طلایی: با به‌کار بردن «رابطـهٔ **فیثاغـورس**»[3] در رابطـهٔ (۱) می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌طوری که در شکل ۳ می‌بینیم، بنا کنیم.

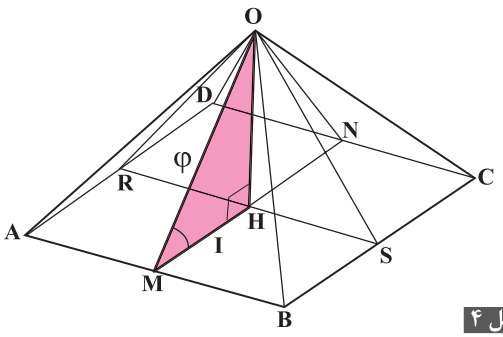


شکل ۳

ایـن مثلث و هر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که با آن متشـابه باشـد (یعنی نسبت وتر به یک ضلع قائم آن φ و به ضلع دیگر $\sqrt{\varphi}$ باشد)، «مثلث طلایی» می‌نامند.

هرمی که برپایهٔ φ بنا شده است:

می‌توان تصور کرد، هرم مربعی روی مثلث قائم‌الزاویه‌ای (در واقع چهار مثلث که دوبه‌دو و پشت‌به‌پشت هم قرار دارند و ضلع مشترک آن‌ها ارتفاع هرم است. در شکل ۴ به مثلث‌های ONH، OSH، ORH، OMH، توجه کنید.) بنا شده که وتر این مثلث فاصلهٔ رأس تا وسط ضلع قاعده است. اگر هرمی مربعی روی مثلث شکل ۳ بنا کنیم، هرم به‌صورت شکل ۴ خواهد بود. گوییم این هرم برپایهٔ φ بنا شده است.



شکل ۴

اکنون به مقایسهٔ هرم بزرگ با هرمی که برپایهٔ φ بنا شده است، می‌پردازیم:

در هرمی که برپایهٔ φ بنا شـده است، داریم: $\sqrt{\varphi}$ = ۱/۲۷۲ = ارتفاع و ۲ = طول ضلع قاعده. نسـبت ارتفاع به طول ضلع قاعده برابر ۰/۶۳۶ خواهد بود.

در هرم بزرگ داریم: ۱۴۶/۵ = ارتفاع و ۲۳۰/۴ = طول ضلع قاعده. اگر نسبت این دو عدد را بیابید، به عدد ۰/۶۳۶ خواهید رسید.

در هرمی که برپایهٔ φ بنا شده است، نسبت مجموع مساحت‌های چهار وجه جانبی به مسـاحت قاعده برابر φ اسـت. طبق محاسبات آغازین مقاله می‌توانیم در هرم بزرگ نیز به چنین نتیجه‌ای برسیم.

مترمربع ۸۵۸۹۲/۸ = ۴×۲۱۴۷۳/۲ = مجموع مساحت‌های وجوه جانبی

۸۵۸۹۲/۸ ÷ ۵۳۰۸۴/۱۶ = ۱/۶۱۸ = φ

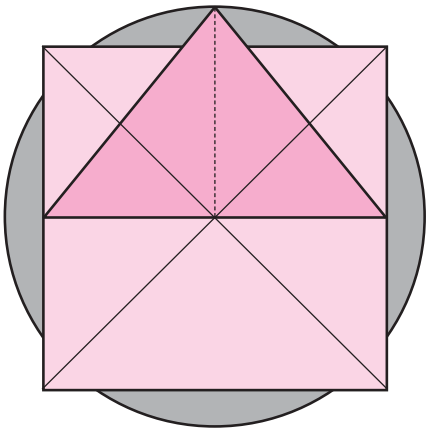
در واقع هرم بزرگ را می‌توان یک هرم طلایی نامید.

π و هرم بزرگ

پی: نسبت محیط هر دایره به قطر آن، عددی ثابت است که آن را با حرف پی یونانی (π) نشان می‌دهند و تا ۵ رقم اعشار این‌گونه است:

$\pi \approx 3/14159$

در هرم بزرگ، محیط قاعده با محیط دایره‌ای که شـعاع آن برابر ارتفاع هرم است، یکسان است. (محاسبات لازم را انجام دهید و به این نتیجه برسید.) پس می‌توانیم نتایج زیر را داشته باشیم:



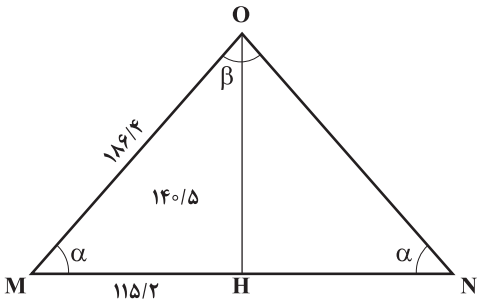
شکل ۵

$$\pi = 2 \times \frac{\text{طول ضلع قاعده}}{\text{ارتفاع}} \Rightarrow \begin{cases} \text{محیط قاعده} = 4 \times \text{طول ضلع قاعده} \\ \text{محیط دایره‌ای که شعاع آن برابر ارتفاع هرم است} = 2\pi \times \text{ارتفاع} \end{cases}$$

یعنی $\pi \approx \frac{2 \times 230/4}{146/5}$

زاویهٔ شیب هرم:

$$\tan\alpha = \frac{146/5}{115/2} = 1/272$$
$$\Rightarrow \alpha = \text{Arc}\tan(1/272)$$
$$\Rightarrow \alpha \approx 51/85^\circ$$



شکل ۶

حال با در نظـر گرفتن $\varphi \approx 1/6180\,3000$ ، $\pi \approx 3/14159$ و با استفاده از جدول نسبت‌های مثلثاتی نتایج جالب زیر را بررسی کنید و به ارتباط هرچه بیشتر هرم بزرگ با این دو ثابت مهم ریاضی پی ببرید:

$$\tan 51/85^\circ \approx \frac{4}{\pi}$$
$$\cos 51/85^\circ \approx \frac{1}{\varphi}$$
$$\sin 51/85^\circ \approx \frac{4}{\pi\varphi}$$

اگـر در مثلث OMN، اندازهٔ زاویـهٔ β را بیابید و $\frac{\alpha}{\beta}$ را چهار برابر کنید، به یکی دیگر از مهم‌ترین ثابت‌های ریاضی خواهید رسـید. این ثابت همان «عدد اویلری» است که تا پنج رقم اعشار به‌صورت زیر است:

$e \approx 2/71828$

$$4 \times \frac{\alpha}{\beta} \approx e$$

جالب اسـت بدانید که این عدد در سـال ۱۶۱۸ میلادی کشف شـده و جای بسـی تعجب اسـت که در هرم بزرگ مصر که قدمت ۴۵۰۰ ساله دارد، دیده می‌شود.

***پی‌نوشت‌ها**

1. Great pyramid
2. Golden ratio
3. pythagorean equation

***منابع**

۱. هندسهٔ ۱، سال دوم دبیرستان. دفتر تألیف کتب درسی. چاپ بیست‌ویکم. ۱۳۹۴.
۲. ریاضی پایهٔ دورهٔ پیش‌دانشگاهی. دفتر تألیف کتب درسی. چاپ پانزدهم. ۱۳۸۸.
3. meisner, Gary. (August 18, 2012), phi, pi and the Great Pyramid of Egypt at Giza.
4. lemesurier, peter. (1977). the great pyramid Decoded.